

# УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАЗА ЛОРЕНЦОВСКИ СЖАТЫХ ТВЕРДЫХ СФЕР И КОНЦЕПЦИЯ ИНДУЦИРОВАННОГО ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ И КРИВИЗНЫ

К. А. Бугаев<sup>1,2, а</sup>, П. В. Олейник<sup>3, б</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина

<sup>2</sup>Физический факультет Киевского национального университета им. Тараса Шевченка, Киев, Украина

<sup>3</sup>Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»,  
Физико-технический институт

## Аннотация

В данной работе рассмотрен исключенный объем частиц газа Лоренцовски сжатых твердых сфер. Вириальное разложение, включающее только вторые вириальные коэффициенты многокомпонентной смеси, преобразовано к форме, которая позволяет его релятивизировать и экстраполировать на случай высоких плотностей в переменных большого канонического ансамбля. Полученное уравнение состояния в нерелятивистском пределе воспроизводит не только второй, но также третий, и четвертый вириальные коэффициенты газа твердых сфер. Проведено сравнение усредненного второго вириального коэффициента для газа пионов с ранее полученным релятивистским аналогом уравнения Ван дер Ваальса и показано, что новое уравнение состояния переходит в ультрарелятивистский режим при более низких плотностях.

**Ключевые слова:** исключенный объем, Лоренцово сокращение, твердые сферы, уравнение состояния

## Введение

Исследование уравнения состояния КХД материи в соударениях тяжелых ионов является в настоящее время одной из наиболее интересных задач ядерной физики высоких энергий, поскольку в настоящее время появилась реальная возможность локализовать как новые фазы этой материи, так и обнаружить (три)критическую точку ее фазовой диаграммы [1]. Речь идет, прежде всего, о фазе с частично восстановленной киральной симметрией (ЧВКС) и о фазе кварк-глюонной плазмы. В последние годы две теоретические группы установили и порядок этих фазовых переходов и область наиболее вероятных энергий соударения ядер [2, 3, 4, 5, 6]: фазовый переход 1-го рода ЧВКС происходит в адронной фазе при энергии соударения ядер в системе центра масс  $\sqrt{s} = 4 - 5$  ГэВ/нукл., в то время как деконфайнмент этой фазы в кварк-глюонную плазму является либо фазовым переходом 2-го рода, либо очень слабым переходом 1-го рода, но при энергии соударения ядер  $\sqrt{s} = 9 - 10$  ГэВ/нукл. В частности, в работе [4] было оценено количество степеней свободы в фазе почти безмассовых адронов и найдено, что он составляет около 1800. Там же было отмечено, что для того, чтобы существовал фазовый переход к кварк-глюонной плазме абсолютно необходимо, чтобы у таких адронов был собственный конечный объем, который приведет к сильному подавлению их давления при

плотностях энергии в окрестности деконфайнмента [4]. Но, поскольку в фазе с ЧВКС масса нестранных адронов  $m_h$  гораздо ниже типичной температуры системы, т.е.  $m_h \ll 100 - 130$  МэВ, то такие частицы являются ультрарелятивистскими и поэтому игнорировать эффектом Лоренцова сокращения их собственных объемов нельзя [4].

Проблема учета эффектов Лоренцова сокращения релятивистских твердых сфер обсуждалась в литературе неоднократно [7, 8], но даже в случае Больцмановской статистики уравнение состояния, удовлетворяющее принципу причинности, для которого скорость звука не превосходит скорость света в вакууме, является довольно сложным даже для частиц одного сорта [8]. Поэтому использование уравнения состояния, полученного в работе [8], для смеси частиц с различными массами и различными радиусами твердого ядра представляется проблематичным [4]. В тоже время в последние годы была предложена концепция индуцированного поверхностного натяжения [9], которая оказалась исключительно успешной для мультикомпонентных смесей как адронов [10, 11], так и ядер [9]. Основные причины такого успеха состоят в том, что, во-первых, полученные уравнения позволяют учесть не только второй, но также третий и четвертый вириальные коэффициенты газа твердых сфер [11], и, во-вторых, число уравнений, которые необходимо решать, равно двум, и оно не зависит от числа компонент с различными радиусами твердого ядра [9, 10, 11].

<sup>а</sup>Bugaev@th.physik.uni-frankfurt.de

<sup>б</sup>pablackof@gmail.com

Поэтому в настоящей работе мы обобщаем концепцию индуцированного поверхностного натяжения, учитывая также и свободную энергию кривизны в большом каноническом ансамбле, которая возникает при учете взаимодействия частиц с окружающей их термальной средой. Как показано ниже, такая концепция позволяет развить уравнение состояния газа Лоренцовски сжатых сфер для произвольного числа компонент с различными радиусами твердого кора и/или различными массами.

## Экстраполяция уравнения состояния на высокие плотности

Для вывода уравнения состояния газа Лоренцовски сжатых твердых сфер мы используем следующую формулу для второго вириального коэффициента таких сфер

$$2v_{kl}^{Urel}(\Theta_v) = \hat{v}_k + \hat{s}_k(\Theta_v)R_l + \hat{c}_k(\Theta_v)R_l^2 + \hat{v}_l + \hat{s}_l(\Theta_v)R_k + \hat{c}_l(\Theta_v)R_k^2, \quad \text{where } \hat{v}_k \equiv \frac{v_k}{\gamma_k}, \quad (1)$$

$$\hat{s}_k(\Theta_v) \equiv s_k \left[ \frac{2}{3\gamma_k} \left( 1 + \frac{\Delta_{c1}}{2} \right) + \frac{a}{2} \left| \sin(\Theta_v) \right| \right], \quad (2)$$

$$\hat{c}_k(\Theta_v) \equiv c_k \frac{2}{3\gamma_k} \left( 1 + \frac{\Delta_{c1}}{2} + \frac{\Delta_{c2}}{4} \right), \quad (3)$$

$$\Delta_{c1} \equiv \cos(\Theta_v) - 1, \quad \Delta_{c2} \equiv [\cos(\Theta_v)]^2 - 1 \quad (4)$$

$$v_j = \frac{4}{3}\pi R_j^3, \quad s_j = 4\pi R_j^2, \quad c_j = 2\pi R_j, \quad (5)$$

где  $R_l$  – это радиус твердого кора сферической частицы сорта  $l$  в системе ее покоя,  $\gamma_l = \frac{\sqrt{m_l^2 + \vec{k}_l^2}}{m_l}$  – релятивистский  $\gamma$ -фактор частицы с массой  $m_l$ , которая в системе покоя термостата имеет 3-импульс  $\vec{k}_l$ , а азимутальный угол  $\Theta_v$  – это угол между 3-импульсами частиц  $k$  и  $l$ , причем, как и в работе [8], в импульсном пространстве ось  $OZ$  направлена вдоль 3-импульса частицы сорта  $k$ . Однако следует помнить о том, что формула (1) применима только для углов:  $-\frac{\pi}{2} \leq \Theta_v \leq \frac{\pi}{2}$ . Поэтому на практике при интегрировании по сферическому углу  $\Theta_v$  его надо выполнять по интервалу  $\Theta_v \in [0; \frac{\pi}{2}]$ : т.е.  $\int_0^\pi d\Theta_v \sin(\Theta_v) = 2 \int_0^{\pi/2} d\Theta_v \sin(\Theta_v)$ . Также в формуле (5) величины  $v_j$ ,  $s_j$  и  $c_j$  – это, соответственно, собственный объем, собственная поверхность и периметр частицы сорта  $j$ .

Формула (1) для параметра  $a = 1$  была получена в работе [8] в пределе тонких дисков, но, как было показано в [8], с точностью около 7% она также воспроизводит и исключенный объем двух нерелятивистских твердых сфер. Введение параметра  $a \simeq 0.775$  позволяет точно воспроизвести второй вириальный коэффициент для газа нерелятивистских твердых сфер

$$\int_0^{\pi/2} d\Theta_v \sin(\Theta_v) 2v_{kl}^{Urel}(\Theta_v) = \frac{4}{3}\pi(R_k + R_l)^3. \quad (6)$$

Анализ показывает, что введение данного параметра в уравнение (1) не сказывается на точности при-

ближения как в случае двух ультрарелятивистских сфер ( $\gamma_l = \gamma_k \rightarrow \infty$ ), так и для случая одной нерелятивистской и одной ультрарелятивистской сфер ( $\gamma_k = 1$ ;  $\gamma_l \rightarrow \infty$ ).

Поскольку выражение (1) для  $2v_{kl}^{Urel}(\Theta_v)$  симметрично по индексам  $k$  и  $l$ , то в симметричных слагаемых по этим индексам не имеет значения к какой из частиц относится интегрирование по углу  $\Theta_v$ . Поэтому аналог вириального разложения для большого канонического ансамбля Больцмановских частиц имеет вид [8]:

$$p = T \sum_k \hat{\varphi}_k e^{\frac{\mu_k}{T}} - T \sum_k \sum_l \hat{\varphi}_k e^{\frac{\mu_k}{T}} v_{kl}^{Urel} \hat{\varphi}_l e^{\frac{\mu_l}{T}}, \quad (7)$$

$$\hat{\varphi}_l(T) = 4\pi g_l \int \frac{dk k^2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\sqrt{m_l^2 + k^2}}{T}} \int_0^{\pi/2} d\Theta_v \sin(\Theta_v), \quad (8)$$

где  $p$  – это давление газа Больцмановских частиц с температурой  $T$  и набором химических потенциалов  $\{\mu_i\}$ , а величина  $\hat{\varphi}_l(T)$  – это термальная плотность газа частиц с массой  $m_l$ , фактором спин-изоспинового вырождения  $g_l$ . Сумма в формуле (7) проводится по всем сортам частиц, причем античастицы рассматриваются в качестве отдельных сортов.

Шляпка над термальной плотностью (8) указывает на то, что двойной интеграл по импульсу и по углу действует как оператор на любую функцию с такой же шляпкой, стоящую правее функции  $\hat{\varphi}_l(T)$ .

Для экстраполяции давления (7) на высокие плотности воспользуемся приемом, предложенным в работе [8]. Сначала подставим выражение (1) в формулу (7) и приведем слагаемые. В результате получаем давление в виде

$$p = T \sum_k \hat{\varphi}_k e^{\frac{\mu_k}{T}} - T \sum_k \sum_l \hat{\varphi}_k e^{\frac{\mu_k}{T}} \frac{1}{2} [\hat{v}_k + \hat{s}_k(\Theta_v)R_l + \hat{c}_k(\Theta_v)R_l^2 + \hat{v}_l + \hat{s}_l(\Theta_v)R_k + \hat{c}_l(\Theta_v)R_k^2] \hat{\varphi}_l e^{\frac{\mu_l}{T}} = \quad (9)$$

$$T \sum_k \hat{\varphi}_k e^{\frac{\mu_k}{T}} - T \sum_k \hat{\varphi}_k e^{\frac{\mu_k}{T}} \left[ \hat{v}_k \sum_l \hat{\varphi}_l e^{\frac{\mu_l}{T}} + \hat{s}_k(\Theta_v) \sum_l R_l \hat{\varphi}_l e^{\frac{\mu_l}{T}} + \hat{c}_k(\Theta_v) \sum_l R_l^2 \hat{\varphi}_l e^{\frac{\mu_l}{T}} \right]. \quad (10)$$

Теперь воспользуемся приближением для полного давления  $p \simeq T \sum_l \varphi_l e^{\frac{\mu_l}{T}}$  и введем новые переменные  $\tilde{\Sigma} \simeq T \sum_l R_l \varphi_l e^{\frac{\mu_l}{T}}$  и  $\tilde{K} \simeq T \sum_l R_l^2 \varphi_l e^{\frac{\mu_l}{T}}$ , для которых теперь постулируем систему уравнений [9]:

$$\frac{p}{T} = \sum_k \hat{\varphi}_k \exp \left[ \frac{\mu_k}{T} - \hat{v}_k \frac{p}{T} - \hat{s}_k \alpha_p \frac{\tilde{\Sigma}}{T} - \hat{c}_k \beta_p \frac{\tilde{K}}{T} \right], \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{\Sigma}}{T} = \sum_k R_k \hat{\varphi}_k \exp \left[ \frac{\mu_k}{T} - \hat{v}_k \frac{p}{T} - \hat{s}_k \alpha_\Sigma \frac{\tilde{\Sigma}}{T} - \hat{c}_k \beta_\Sigma \frac{\tilde{K}}{T} \right], \quad (12)$$

$$\frac{\tilde{K}}{T} = \sum_k R_k^2 \hat{\varphi}_k \exp \left[ \frac{\mu_k}{T} - \hat{v}_k \frac{p}{T} - \hat{s}_k \alpha_K \frac{\tilde{\Sigma}}{T} - \hat{c}_k \beta_K \frac{\tilde{K}}{T} \right]. \quad (13)$$

Ясно, что при малых плотностях система (11)-(13) эквивалентна исходному уравнению (7), поскольку все отличия за счет введения экспонент появятся только в слагаемых с третьей и более высокими степенями

плотности. То же самое справедливо и для введенных параметров  $\alpha_p, \beta_p, \alpha_\Sigma, \beta_\Sigma, \alpha_C, \beta_C$ . Как показано в работе [11], правильный выбор этих параметров позволяет воспроизвести не только второй, но также третий, четвертый и даже пятый вириальные коэффициенты газа твердых сфер. При помощи замены переменных

$$\alpha_p \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma, \quad \beta_p \tilde{K} \rightarrow K, \quad (14)$$

$$\frac{\alpha_\Sigma}{\alpha_p} \rightarrow \alpha, \quad \frac{\beta_C}{\beta_p} \rightarrow \beta, \quad (15)$$

мы получаем все еще достаточно общую систему уравнений с четырьмя параметрами даже для случая  $\alpha_C = \alpha_\Sigma$  и  $\beta_\Sigma = \beta_p$

$$\frac{p}{T} = \sum_k \hat{\varphi}_k \exp \left[ \frac{\mu_k}{T} - \hat{v}_k \frac{p}{T} - \hat{s}_k \frac{\Sigma}{T} - \hat{c}_k \frac{K}{T} \right], \quad (16)$$

$$\frac{\Sigma}{T} = \alpha_p \sum_k R_k \hat{\varphi}_k \exp \left[ \frac{\mu_k}{T} - \hat{v}_k \frac{p}{T} - \hat{s}_k \alpha \frac{\Sigma}{T} - \hat{c}_k \frac{K}{T} \right], \quad (17)$$

$$\frac{K}{T} = \beta_p \sum_k R_k^2 \hat{\varphi}_k \exp \left[ \frac{\mu_k}{T} - \hat{v}_k \frac{p}{T} - \hat{s}_k \alpha \frac{\Sigma}{T} - \hat{c}_k \beta \frac{K}{T} \right]. \quad (18)$$

Из того факта, что величина, стоящая в показателе экспоненты в формулах (16)-(18) является свободной энергией системы, следует вывод о том, что величина  $\Sigma$  имеет смысл коэффициента поверхностного натяжения, а  $K$  - это коэффициент кривизны. А поскольку они генерируются отталкиванием между данной частицей и газом других частиц, то величины  $\Sigma$  и  $K$  индуцированы взаимодействием частиц с плотной термальной средой. Заметим, что в нерелятивистском пределе система (16)-(18) является обобщением системы аналогичных уравнений, полученных впервые для произвольного числа сортов частиц в работе [9]. Поэтому система (16)-(18) позволяет одновременно учесть не только эффекты Лоренцова сокращения, но и эффекты более плотной упаковки, по сравнению с приближением ВдВ.

Если посмотреть на поправку исключенного объема, стоящую в экспоненте в формуле (18), то можно определить эффективный исключенный объем, зависящий от импульса и угла частицы

$$\frac{\hat{v}_k p + \hat{s}_k \Sigma + \hat{c}_k K}{T} \equiv \frac{v_k^{eff} p}{T} \Rightarrow v_k^{eff} = \frac{\hat{v}_k p + \hat{s}_k \Sigma + \hat{c}_k K}{p}. \quad (19)$$

Для демонстрации роли индуцированного поверхностного натяжения и кривизны введем исключенный объем, усредненный по импульсам и углам

$$\langle v_k^{eff} \rangle = \frac{(\hat{\varphi}_k \cdot \hat{v}_k) p + (\hat{\varphi}_k \cdot \hat{s}_k) \Sigma + (\hat{\varphi}_k \cdot \hat{c}_k) K}{p(\hat{\varphi}_k \cdot 1)}, \quad (20)$$

Рис. 1 показывает зависимость функции  $f(T/m) = \frac{\langle v_1^{eff} \rangle}{4v_1}$  для случая  $\alpha_p = \beta_p = 1$  и двух наборов значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$  для газа пионов ( $m_1 = 137$  МэВ,  $g_1 = 3$ ,  $\mu_1 = 0$ ) с радиусом твердого ко-ра  $R_1 = 0.39$  фм. Заметим, что значения  $\alpha = 1$  и  $\beta = 1$  формально отвечают случаю уравнения ВдВ с отталкиванием и учетом релятивистских эффектов. Однако, как видно из Рис. 1, для  $T > m_1$  даже это

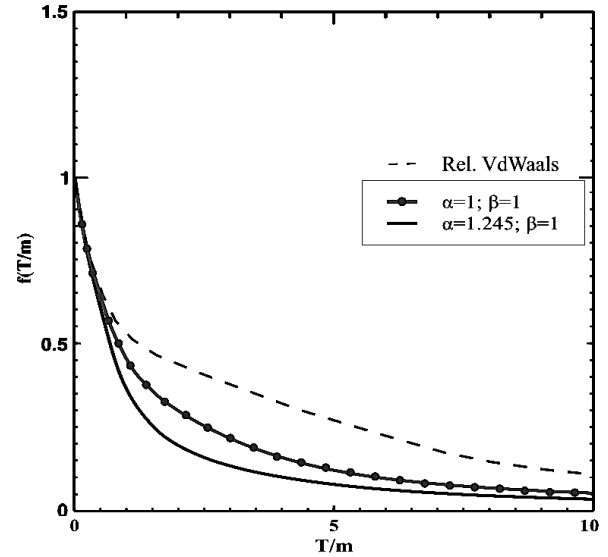


Рис. 1. Усредненный исключенный объем газа Лоренцовски сжатых твердых сфер в единицах исключенного объема двух нерелятивистских твердых сфер радиуса  $R_1 = 0.39$  фм как функция температуры системы  $T$ . Пунктирная кривая получена в модели газа ВдВ [8], сплошные кривые отвечают модели с индуцированным поверхностным натяжением и кривизной, полученной в данной работе (см. текст).

решение системы (16)-(18) отличается от пунктирной кривой, полученной для релятивистского газа ВдВ в работе [8]. Значения параметров  $\alpha = 1.245$  и  $\beta = 1$  воспроизводят третий и четвертый вириальные коэффициенты газа нерелятивистских твердых сфер [11] (сплошная кривая на Рис. 1.). Таким образом в данной работе прямыми вычислениями показано, что эффективный исключенный объем газа пионов для уравнения состояния с индуцированным поверхностным натяжением и кривизной убывает с температурой гораздо быстрее, т.е. такое уравнение состояния становится ультрарелятивистским быстрее, чем уравнение состояния предложенное ранее в работе [8].

## Выводы

В данной работе с помощью эвристического вывода получено уравнение состояния Лоренцовски сжатых твердых сфер, которое одновременно в нерелятивистском пределе позволяет выйти за рамки приближения Ван дер Ваальса и учесть не только второй, но и более высокие вириальные коэффициенты газа нерелятивистских твердых сфер. Полученное уравнение состояния позволяет находить не только давление системы, но и коэффициенты поверхностного натяжения и кривизны, которые индуцированы взаимодействием частиц с окружающей их термальной средой в довольно общем виде. Поэтому предложенный подход может оказаться важным и для других задач, в которых необходимо учесть эффекты влияния среды на термодинамические функции системы.

Прямыми вычислениями показано, что новое уравнение состояния переходит в ультрарелятивистский

режим для существенно меньших значений температуры системы, чем релятивизованное уравнение состояния Ван дер Ваальса, полученное в работе [8].

Еще одно преимущество нового уравнения состоит в том, что число уравнений не зависит от числа различных частиц в системе. Как и в случае уравнения состояния с индуцированными поверхностным натяжением, которое проанализировано в работах [4, 9, 10, 11] это преимущество может привести к существенному снижению времени вычислений по сравнению с другими подходами. Кроме того, за счет введения двух новых параметров  $\alpha_p$  и  $\beta_p$ , мы надеемся описать также пятый и, возможно, шестой вириальный коэффициенты газа твердых сфер.

С помощью полученного в данной работе уравнения состояния мы планируем исследовать фазовые переходы между обычной адронной материей и адронной материей с частично восстановленной киральной симметрией, а также между последней и фазой кварк-глюонной плазмы.

**Благодарности.** Авторы благодарны проф. Э. Г. Никонову за полезные обсуждения и важные замечания. К.А.Бугаев благодарен за финансовую поддержку его работы в рамках Программы «Фундаментальных Исследований в Физике Высоких Энергий и Ядерной Физике», основанную Секцией ядерной физики Национальной Академии Наук Украины.

#### Перечень использованных источников

1. J. Schukraft. QM2017: Status and Key open Questions in Ultra-Relativistic Heavy-Ion Physics // Nucl. Phys. A. — 2017. — Vol. 967. — P. 1–10.
2. K. A. Bugaev et al. Thermodynamically anomalous regions and possible new signals of mixed-phase formation // Eur. Phys. J. A. — 2016. — Vol. 52, no. 6. — P. 175–189.
3. K. A. Bugaev et al. New Signals of Quark-Gluon-Hadron Mixed Phase Formation // Eur. Phys. J. A. — 2016. — Vol. 52, no. 8. — P. 227–232.
4. K. A. Bugaev et al. Threshold Collision Energy of the QCD Phase Diagram Tricritical Endpoint // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2018. — Vol. 15, no. 3. — P. 210–224.
5. W. Cassing, A. Palmese, P. Moreau and E. L. Bratkovskaya. Chiral symmetry restoration versus deconfinement in heavy-ion collisions at high baryon density // Phys. Rev. C 93, 014902. — 2016.
6. A. Palmese et al. Chiral symmetry restoration in heavy-ion collisions at intermediate energies // Phys. Rev. C 94, 044912. — 2016.
7. K. A. Bugaev, M. I. Gorenstein, H. Stöcker and W. Greiner. Van der Waals Excluded Volume Model for Lorentz Contracted Rigid Spheres // Phys.Lett. B. — 2000. — Vol. 485. — P. 121–125.
8. K. A. Bugaev. The Van-der-Waals gas EOS for the Lorentz contracted spheres // Nucl. Phys. A. — 2008. — Vol. 807. — P. 251–268.
9. V. V. Sagun, A. I. Ivanytskyi, K. A. Bugaev and I. N. Mishustin. The statistical multifragmentation model for liquid-gas phase transition with a compressible nuclear liquid // Nucl. Phys. A. — 2014. — Vol. 924. — P. 24–46.
10. K. A. Bugaev et al. Going beyond the second virial coefficient in the hadron resonance gas model // Nucl. Phys. A. — 2018. — Vol. 970. — P. 133–155.
11. V. V. Sagun et al. Hadron resonance gas model with induced surface tension // Eur. Phys. J. A. — 2018. — Vol. 54. — P. 100–115.